Über das Interpolationsproblem in nichtkommutativen Ringen

Von H. K. KAISER in Wien (Österreich)

1. Einleitung

Unter dem Interpolationsproblem in einer universalen Algebra $\mathfrak{A}$ versteht man folgende Aufgabe: Seien $a_1, a_2, \ldots, a_r$ (r natürliche Zahl) verschiedene Elemente einer Algebra $\mathfrak{A}$. Gesucht wird ein Polynom über $\mathfrak{A}$, welches an diesen r Stellen vorgegebene Werte $b_1, b_2, \ldots, b_r \in \mathfrak{A}$, die nicht notwendiger Weise verschieden sein müssen, annimmt. (Zur Definition eines Polynomes über einer universalen Algebra siehe H. LAUSCH—W. NÖBAUER [3]). Im allgemeinen wird man nicht erwarten können, daß dieses Problem für jede universale Algebra allgemein lösbar ist. Wir müssen also zuerst jene Klassen universaler Algebren bestimmen, wo zu n beliebigen verschiedenen Elementen der Algebra $\mathfrak{A}$ stets mindestens ein Polynom existiert, welches für diese Werte von $\mathfrak{A}$ vorgegebene Werte aus $\mathfrak{A}$ annimmt. So eine Algebra $\mathfrak{A}$ nennt man lokal-polynomvollständig (zur exakten Definition dieses Begriffes siehe [1]).

In [1] wurden alle lokal-polynomvollständigen Ringe bestimmt: Genau die einfachen Nichtzeroringe sind lokal-polynomvollständig. Für eine Teilklasse der einfachen Nichtzeroringe, nämlich für die Klasse der Körper, ist die Lösung des oben gestellten Problems wohlbekannt. Lösungen liefern z. B. die Interpolationsformel von Lagrange und das Interpolationsverfahren von Newton (siehe L. RÉDEI [4]).

In dieser Note wird ein Weg angegeben, wie man für einfache Nichtzeroringe $\mathfrak{R}$, die artinsch sind, ein Interpolationspolynom bestimmen kann. Wendet man die entwickelte Methode auf den Spezialfall an, daß $\mathfrak{R}$ ein Körper ist, so erhält man die Interpolationsformel von Lagrange. Wir werden uns in unseren Ausführungen auf Polynome in einer Variablen beschränken. Die Überlegungen dieser Arbeit lassen sich ohne Schwierigkeiten auf Polynome in mehreren Variablen übertragen. Dem Rezensenten bin ich für einen wertvollen Hinweis zu Dank verpflichtet.

2. Interpolation auf einfachen artinschen Ringen

Sei $\mathfrak{R}=\langle R, +, \cdot\rangle$ ein einfacher artinscher Ring mit $\mathfrak{R}^2\neq\{0\}$. Nach dem zweiten Struktursatz von Wedderburn—Artin (siehe A. KERTÉSZ [2]) ist jeder solche Ring $\mathfrak{R}$ isomorph zu einem vollen Matrizenring $\mathfrak{K}_n$ über einem Schiefkörper $\mathfrak{K}$. Also besitzt $\mathfrak{R}$ ein Einselement, welches wir mit 1 bezeichnen.

Seien $a_1, \dots, a_r$ verschiedene Elemente von $\mathfrak{R}$, $b_1, \dots, b_r$ beliebige Elemente von $\mathfrak{R}$. Wir suchen ein Polynom $f(x)\in\mathfrak{R}[x]$ mit der Eigenschaft $f(a_i)=b_i$ $(i=1, \dots, r)$. Zunächst wollen wir die gestellte Aufgabe vereinfachen:

Lemma. *Es genügt, ein Polynom zu finden, welches an einer Stelle den Wert* 1, *an den anderen* $r-1$ *Stellen den Wert* 0 *annimmt.*

Beweis. Sei $p_i(x)\in\mathfrak{R}[x]$ ein Polynom, welches an der Stelle $a_i\in\mathfrak{R}$ den Wert 1 annimmt und für $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_r\in\mathfrak{R}$ verschwindet. Das Polynom $p(x)=$ $=b_1p_1(x)+\dots+b_rp_r(x)$ ist dann eine Lösung unseres Problems.

Satz. *Sei* $\mathfrak{R}=\langle R, +, \cdot\rangle$ *ein einfacher artinscher Ring mit* $\mathfrak{R}^2\neq\{0\}$. *Dann gibt es Elemente* $u_{ti}\in\mathfrak{R}$ *und* $v_{ti}\in\mathfrak{R}$ $(i=1, \dots, r;\ t=1, \dots, n)$ *mit der Eigenschaft, daß das Polynom:*

$$\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{r} u_{1i}(x-a_i)v_{1i}+\dots+\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{r} u_{ni}(x-a_i)v_{ni}$$

an der Stelle $a_k\in\mathfrak{R}$ *den Wert* 1 *annimmt und an den Stellen* $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_r\in\mathfrak{R}$ *verschwindet.*

Beweis. Das angegebene Polynom nimmt an den Stellen $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots$ $\dots, a_r$ den Wert null an. Nach dem Satz von Wedderburn—Artin ist $\mathfrak{R}$ isomorph zu $\mathfrak{K}_n$ ($\mathfrak{K}$ Schiefkörper). Den durch diesen Satz gesicherten Isomorphismus bezeichnen wir mit φ. Da $a_s\neq a_k$ für $s=1, \dots, k-1, k+1, \dots, r$, ist $\varphi(a_k-a_s)$ ungleich der Nullmatrix. Unter einer elementaren Zeilenumformung (Spaltenumformung) einer $n\times n$ Matrix M über einem Schiefkörper $\mathfrak{K}$ verstehen wir die Vertauschung zweier Zeilen (Spalten) von M, die Multiplikation einer Zeile (Spalte) mit einem Element $c\in\mathfrak{K}$ $(c\neq 0)$ und die Addition zu einer anderen Zeile (Spalte). In L. RÉDEI [4] wird gezeigt, daß man diese Umformungen durch linksseitige bzw. rechtsseitige Multiplikation mit Matrizen aus $\mathfrak{K}_n$ durchführen kann. Es gibt also für fest gewähltes t Matrizen $\varphi(u_{ti})$, $\varphi(v_{ti})\in\mathfrak{K}_n$ $(i=1, \dots, k-1, k+1, \dots, r)$ derart, daß

$$\varphi(u_{ti})\varphi(a_k-a_i)\varphi(v_{ti}) = \varphi[u_{ti}(a_k-a_i)v_{ti}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \dots 0 \dots 0\\ \dots & \dots\dots\dots\dots\\ 0 & 0 \dots 1 \dots 0\\ \dots & \dots\dots\dots\dots\\ 0 & 0 \dots 0 \dots 0 \end{pmatrix}.$$

(Dabei steht das Element 1 an der Stelle (t, t)). Nun bilden wir die Produkte $\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{r} \varphi[u_{ti}(a_k - a_i)v_{ti}]$ für $t=1, \dots, n$.

Die Summe dieser n Matrizen ergibt die Einheitsmatrix von $\mathfrak{K}_n$, also $\varphi(1)$. Damit ist der Satz bewiesen.

Aus unserem Satz ergibt sich unmittelbar:

Folgerung. *Für einen einfachen artinschen Nichtzeroring $\mathfrak{R}$ gibt es stets ein Polynom $f(x) \in \mathfrak{R}[x]$ vom Grad $\leqq r-1$, welches an r verschiedenen Stellen von $\mathfrak{R}$ vorgegebene Werte aus $\mathfrak{R}$ annimmt.*

Der Grad eines Polynoms von $\mathfrak{R}[x]$ ist dabei wie folgt definiert: Man betrachte alle Darstellungen des Polynoms als Summe gewisser Produkte von Elementen aus $\mathfrak{R}$ und Potenzen von x. Der Grad einer derartigen Darstellung ist das Maximum der Exponentensummen von x in den einzelnen Summanden. Der Grad eines Polynoms ist das Minimum der Grade der Darstellungen dieses Polynoms. Ersichtlich ergibt diese Definition im Falle eines kommutativen Ringes mit Einselement den Grad eines Polynoms im üblichen Sinne.

Bemerkung. Im allgemeinen sind die Koeffizienten des oben angegebenen Interpolationspolynoms nicht eindeutig bestimmt. So kann man z. B. den ersten Summanden von links und rechts beliebig oft mit jener Matrix multiplizieren, die als erstes Diagonalelement 1 und sonst lauter Elemente 0 besitzt, und man erhält ein weiteres Interpolationspolynom. Berechnet man Interpolationspolynome im vollen Matrizenring der 2×2 Matrizen über GF(2), so kann man unschwer Beispiele finden, wo sich nicht einmal durch Multiplikation mit invertierbaren Matrizen Eindeutigkeit erreichen läßt.

Literatur

[1] H. K. KAISER, A class of locally complete universal algebras, *J. London Math. Soc.* (2), 9 (1974).

[2] A. KERTÉSZ, *Vorlesungen über artinsche Ringe,* Akadémiai Kiadó (Budapest 1968).

[3] H. LAUSCH—W. NÖBAUER, *Algebra of polynomials,* North Holland (Amsterdam, 1973).

[4] L. RÉDEI, *Algebra,* Akademische Verlagsgesellschaft (Leipzig, 1959).

(Eingegangen am 15. Oktober 1973, umgearbeitet am 18. Januar 1974)